

Allgemein

Gegeben: Rekursion

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n)$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$

Startwerte $a_0, \dots, a_{k-1}$

Schritt 1: Ignoriere $f(n)$ und
Startwerte und finde die
allgemeine Lösung

$$\lambda_1 \alpha_1^n + \dots + \lambda_k \alpha_k^n \text{ der}$$

homogenen Rekursion

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$$

Bestimme $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ noch nicht!

Schritt 2: Finde irgendeine
Lösung b_n der inhomogenen
Rekursion

$$b_n = c_1 b_{n-1} + \dots + c_k b_{n-k} + f(n)$$

Die Startwerte müssen nicht passen

Schritt 3: Die Lösung für a_n ist
von der Form

$$a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \dots + \lambda_k \alpha_k^n + b_n$$

Setze nun Startwerte $a_0, \dots, a_{k-1}$

ein, um $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ auszurechnen.

Beispiel

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - n + 6 \quad \forall n \geq 2$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1.$$

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

$$\text{Char. Polynom: } x^2 - 4x + 4$$

$$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n$$

$b_n = -n + 2$ erfüllt die Rekursion

$$b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2} - n + 6$$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \\ & -4(n-1)+8 \quad +4(n-2)-8 \quad -n+6 \\ & \quad \quad \quad = -n+2 \end{aligned}$$

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n - n + 2$$

$$0 = a_0 = \lambda_1 \cdot 2^0 + 2 = \lambda_1 + 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2$$

$$\begin{aligned} 1 = a_1 &= \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 2 - 1 + 2 \\ &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 2$$

$$a_n = -2 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n - n + 2$$

How to do Schritt 2, wenn

$$f(n) = p(n) \cdot q^n$$

mit $q \in \mathbb{C}$ und $p(n)$ ein Polynom

Wenn q keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann

gibt es eine Lösung von der Form

$$b_n = r(n) \cdot q^n, \text{ wobei } r(n)$$

ein Polynom mit demselben Grad

wie der von $p(n)$ ist

Ist q Nullstelle mit Vielfachheit k ,

dann ist $b_n = r(n) \cdot q^n$, wobei

$$\deg r(n) = \deg p(n) + k$$

Aufgabe 1: Löse die Rekursion $a_n = a_{n-2} + 2^{n-1} \quad \forall n \geq 2$

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{6}(-(-1)^n + 2^{n+2} - 3)$$

Aufgabe 2: Löse die Rekursion $a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} + 2 \cdot (-1)^n$

$$a_n = i^n + (-i)^n + (n-1)(-1)^n$$

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1$$

$$-n+6 = \underbrace{(-n+6)}_{p(n)} \cdot \underbrace{1^n}_{q^n}$$

$$b_n = (r_0 + r_1 \cdot n) \cdot 1^n = r_0 + r_1 \cdot n$$

$$b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2} - n + 6$$

$$r_0 + r_1 \cdot n = 4(r_0 + r_1 \cdot (n-1)) - 4(r_0 + r_1 \cdot (n-2)) - n + 6$$

$$r_0 + r_1 \cdot n = (4r_0 - 4r_1 - 4r_0 + 8r_1 + 6) + (4r_1 - 4r_1 - 1)n$$

$$r_0 + r_1 \cdot n = (4r_1 + 6) - n$$

$$\hookrightarrow r_0 = 4r_1 + 6 \Rightarrow r_0 = 2$$

$$r_1 = -1$$

$$\Rightarrow b_n = -n + 2$$

551142

Eine bekannte Mathematikerfamilie hat drei Kinder namens *Antonia*, *Bernhard* und *Christian*. Jeden Abend muss eines der Kinder den Aufwasch erledigen. Eines Tages entschließt sich ihr Vater, in Abhängigkeit vom Betragen seiner Kinder in den vorausgegangenen Wochen einen Aufwaschplan für die nächsten 55 Tage zu erstellen.

Es bezeichne x die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen Antonia mindestens einmal an zwei aufeinanderfolgenden Tagen an der Reihe ist. Ferner bezeichne y die Anzahl der möglichen Aufwaschpläne, in denen es zwei aufeinanderfolgende Tage gibt, an deren erstem Antonia und an deren zweitem Bernhard an der Reihe ist.

Man entscheide, ob x und y verschieden sind und welche dieser beiden Zahlen gegebenenfalls größer ist.